TD 41 : Espaces préhilbertiens

Produit scalaire et norme

1 ★ On pose $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et pour tous $f,g \in E$:

$$\langle f \mid g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tous $P,Q \in E$:

$$(P \mid Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + \ldots + P(n)Q(n)$$

Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto (P \mid Q)$ définit un produit scalaire sur E.

3 ★ Soit E un espace préhilbertien réel.

1) Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur E. Montrer que pour tous $x,y \in E$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Cette identité est appelée la règle du parallélogramme. On admet que, réciproquement, si $\|\cdot\|$ est une norme sur E qui vérifie cette règle, alors il s'agit d'une norme euclidienne.

2) Sur $E = \mathbb{R}^n$, on définit

$$\|x\|_\infty := \sup_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E qui n'est pas euclidienne.

3) Pour $E = \mathbb{R}^2$, dessiner l'ensemble $A = \{x \in E \mid \|x\|_\infty \le 1\}$.

4 ★★ Soit E un espace préhilbertien réel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\forall x,y \in E \qquad \langle f(x) \mid f(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$
- $\forall x \in E \qquad \|f(x)\| = \|x\|$

Si l'une de ces assertions est vérifiée, on dit que f est une isométrie vectorielle. On suppose maintenant que E est un espace euclidien.

2) Montrer que toute isométrie vectorielle de E est inversible.

3) On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. Montrer que $O(E)$ est un groupe pour la composition.

5 ★★ (***Classique !***) Soit $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \le n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

6 ★★ Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, on a

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f(t)^2 dt$$

7 ★★ On pose $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(A^\top B)$$

est un produit scalaire sur E.

2) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\mathrm{Tr}(A^2)| \le \mathrm{Tr}(A^\top A)$.

Orthogonalité

8 ★ Déterminer $F^\perp$ dans chacun des cas suivants :

1) $F = \mathrm{Vect}((2,1,3),(1,7,-1))$
2) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$
3) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x+y-z+t = 0 \\ x+2y+3z+t = 0 \end{cases}\right\}$

9 ★ Soit E un espace euclidien et X une partie quelconque de E. Montrer que $(X^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(X)$.

10 ★☆ On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère le produit scalaire canonique φ défini sur E par :

$$\forall A, B \in E \qquad \varphi(A,B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$$

Montrer que $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques. *On pourra admettre que* $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

11 ★★ On note E l'e.v. des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < \infty$. Pour tous $u, v \in E$, on définit :

$$(u \mid v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

1) Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ définit un produit scalaire sur E.
2) On note F le s.e.v. des suites presque nulles, i.e. des suites qui s'annulent à partir d'un certain rang.
3) Montrer que F est de dimension infinie.
4) Montrer que $F^\perp = \{0_E\}$.
5) En déduire que $F \neq (F^\perp)^\perp$.
6) Montrer que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.

12 ★★ Soit E un espace euclidien et F, G deux s.e.v. de E. Montrer que

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \text{et} \qquad F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$$

13 ★★★ Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$$

1) Montrer que $F^\perp = \{0_E\}$.
2) Montrer le même résultat avec $F = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

Bases orthonormées, Gram-Schmidt

14 ★ Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.
2) Déterminer les composantes des vecteurs $x = (3, -2, 7)$ et $y = (4, 1, -5)$ selon la base (e_1, e_2, e_3).
3) Soit $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur α, β, γ est-ce que $\|u\| = 1$?

15 ★☆ Orthonormaliser les bases de E suivantes :

1) Dans $E = \mathbb{R}^2$, la base (e_1, e_2) avec $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (0,1)$.
2) Dans $E = \mathbb{R}^3$, la base (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (1,1,-1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (-1,1,1)$.
3) Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, la base $(1, X, X^2)$ selon le produit scalaire
$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Projections orthogonales

16 ★☆ On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\forall P, Q \in E \qquad \langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

1) Déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
2) Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur F.
3) En déduire $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

17 ★★ Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2\, dx$.

18 ★★ Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit p un projecteur de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- P : $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont orthogonaux (i.e. p est un projecteur orthogonal)
- Q : $\forall x, y \in E \qquad \langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$